8. Poser et résoudre un problème

Savoir résoudre un problème, cela s'apprend ! C'était le credo du mathématicien hongrois George **Polya** quand il publia en 1945 son livre *How to solve it*, en français « Comment le résoudre ». Traduit dans plus de 17 langues et vendu à l'époque à plus d'un million d'exemplaires, le livre de George Polya est vite devenu la bible des étudiants en science. Brillant pédagogue, Polya avait identifié les quatre principes élémentaires à respecter pour se donner un maximum de chances de résoudre un problème posé.

8.1. Comprendre le problème

George **Pólya**
(1887 - 1985)

En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé. Souvent, le simple fait de ne pas bien maîtriser la signification d'une partie même infime du problème empêche de poursuivre le raisonnement. Aux yeux de Polya, il faut se poser certaines questions références ayant pour objet de vérifier que l'on a bien tout compris.

Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?

Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue. Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?

Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.

Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

8.2. Concevoir un plan

George Polya
Comment poser et résoudre un problème
éditions Jacques Gabay (1989)
237 pages

Deuxième principe posé par Polya : établir un plan d'attaque. En d'autres termes, c'est l'élaboration et le choix de la stratégie à suivre qui va assurer un maximum de succès, car, trop souvent, on disperse son esprit en réfléchissant de 36 façons différentes.

Avez-vous déjà rencontré ce problème ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?

Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ? Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?

Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.

Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ?

Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Reportez-vous aux définitions.

Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ?

Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?

Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ?

Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

8.3. Mettre le plan à exécution

Le troisième principe de Polya est même plus simple que les deux premiers, car il s'agit là de savoir se tenir à la stratégie adoptée. Il faut donc savoir faire preuve de patience, ne pas se décourager et si vraiment cela est nécessaire, changer de méthode.

En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre.

Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

N'oubliez pas d'écrire clairement la réponse à la question posée ! Mettez-la bien en évidence (typiquement en la soulignant deux fois).

8.4. Revenir sur sa solution

Le dernier principe posé par Polya consiste à se relire, à jeter un œil sur ce que l'on vient de faire, en considérant ce qui a semblé fonctionner et ce qui n'a pas marché. Cela permet de mieux comprendre pourquoi il fallait recourir à la stratégie employée dans ce cas et de réfléchir plus vite lors de problèmes futurs.

Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?

Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?

Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

Toute la pertinence de George Polya, c'est véritablement d'avoir mis au point une méthode qui peut servir bien au-delà des seuls problèmes mathématiques. Essayez de l'appliquer dans la vie courante, vous ne serez pas déçu du résultat si vous respectez bien les quatre principes fondamentaux.

8.5. Un premier exemple : les robinets

Aqualand, Cadix, Espagne

Un robinet remplirait un bassin en 3 heures et un autre en 7 heures.
Combien de temps faudrait-il pour remplir le bassin en ouvrant les deux robinets ?

Première étape : comprendre le problème

Première constatation : on ne donne pas le volume du bassin. Cela veut dire que l'on peut se passer de cette information.

Deuxième étape : concevoir un plan

Reformulons l'énoncé. Que se passe-t-il en une heure ? Quelle fraction du bassin sera remplie ?
Quand on le saura, il suffira d'inverser cette fraction pour connaître le temps de remplissage. En effet, s'il est à moitié rempli en une heure, il faudra 2 heures pour le remplir. S'il est rempli au 2/3, il faudra 3/2 = 1.5 heure.

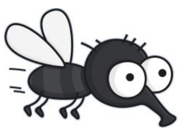
Troisième étape : exécuter le plan

En une heure, le premier robinet remplirait 1/3 du bassin, le second 1/7. Pour savoir quelle faction du bassin sera remplie avec les deux robinets, il suffit d'additionner ces deux fractions : $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{7}{21}+\frac{3}{21}=\frac{10}{21}$.
Donc, en une heure, environ la moitié du bassin sera remplie. Pour le remplir entièrement, il faudra 21/10 = 2.1 heures.
Le bassin sera rempli en **2 heures et 6 minutes**.

Quatrième étape : revenir sur la solution

On peut raisonner autrement. En 21 heures, le premier robinet remplirait 7 bassins et le second remplirait 3 bassins. Les deux robinets remplissent donc 10 bassins en 21 heures. Donc, pour un bassin, il faudra 21/10 = 2.1 heures. On retrouve notre résultat.

8.6. Un deuxième exemple : la mouche



Deux promeneurs distants de 3 km se rapprochent l'un de l'autre en marchant sur une route rectiligne. L'un marche régulièrement à 4 km/h et l'autre à 5 km/h. Une mouche fait des allers-retours de l'un à l'autre, en suivant la route, à la vitesse de 15 km/h.
Quand les deux promeneurs se seront rejoints, quelle distance la mouche aura-t-elle parcourue ?

Première étape : comprendre le problème

On parle ici de vitesses. Il faut se rappeler que :

$$\text{vitesse}=\frac{\text{distance}}{\text{temps}} \quad (1)$$

Il en découle deux autres relations utiles :

$$\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps} \quad (2)$$

$$\text{temps}=\frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} \quad (3)$$

On cherche une distance dont le résultat sera donné en kilomètres.

Deuxième étape : concevoir un plan

Évidemment, il paraît irréaliste (mais c'est faisable...) de calculer étape par étape la distance parcourue par la mouche. La bonne idée est de calculer le temps de vol de la mouche. Grâce à la relation (2), il suffira de le multiplier par la vitesse de la mouche pour connaître la distance qu'elle aura parcourue.
Combien de temps vont mettre les promeneurs à se rejoindre ?
Cette question intermédiaire demande elle aussi une petite réflexion. On peut simplifier le problème en se disant que le temps serait le même si le premier promeneur ne bougeait pas et que le second marchait à 9 km/h (l'addition des deux vitesses des promeneurs).

Troisième étape : exécuter le plan

Ainsi, par la relation (3), le temps pris par les promeneurs pour se rejoindre sera de $\frac{3 \text{ km}}{9 \text{ km/h}}$ = 1/3 d'heure (20 minutes).
Pendant ce temps, la mouche parcourra la distance de 15 km/h x 1/3 heure = 5 km. On a utilisé la relation (2).
La réponse est donc : **5 km**.

Quatrième étape : revenir sur la solution

Puisque la mouche se déplace plus vite que les promeneurs, il est clair que le résultat doit être supérieur à 3 km (distance initiale entre les promeneurs).

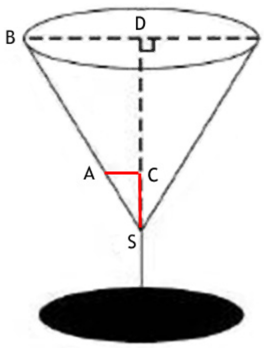
On a ici un exemple de problème qui est à première vue très compliqué, mais qui devient très simple si l'on change de point de vue : il ne faut pas essayer de calculer directement la distance parcourue par la mouche, mais la durée de son vol. C'est cette durée qui permet ensuite de calculer facilement la distance.

8.7. Un troisième exemple : le verre

Un verre conique est placé sous un robinet qui coule goutte à goutte. Après une minute, le verre est rempli au quart de sa hauteur.
Combien de temps faudra-t-il pour que le verre soit rempli à ras bord ?

Première étape : comprendre le problème

Faisons un dessin pour bien se représenter le problème et plaçons quelques lettres :



Il faudra clairement calculer des volumes.
Rappelons que le volume V d'un cône est donné par la formule $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$. Sur notre dessin, $r = BD$ et $h = SD$.

Remarquons que ni r ni h ne sont donnés. Probablement qu'on n'aura pas besoin de les connaître...

L'inconnue est le temps qu'il faudra pour remplir le verre. On sait qu'après une minute, le verre est rempli au quart de sa hauteur. Sur notre dessin : $SC = \frac{1}{4} SD$.

Deuxième étape : concevoir un plan

Il suffit de savoir quelle est la fraction du volume qui est rempli d'eau après une minute. Comme les triangles *SAC* et *SBD* sont semblables, on pourra utiliser le théorème de Thalès pour calculer le rayon *AC* et le comparer au rayon *BD*. On pourra ensuite comparer le volume d'eau après une minute et le volume total du verre, afin de calculer le temps total de remplissage du verre.

Troisième étape : exécuter le plan

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AC}{BD}=\frac{SC}{SD}$, ce qui implique que $AC=\frac{BD\cdot SC}{SD}$.

Comme $SC = \frac{1}{4}SD$, on a $AC = \frac{1}{4}BD$, après simplification. Cela signifie qu'au quart de la hauteur, le rayon vaut aussi le quart du rayon du verre.

Le volume d'eau dans le verre après une minute est donc $V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{r}{4}\right)^2\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{1}{64}\frac{\pi}{3}r^2h$, ce qui représente 1/64 du volume total.

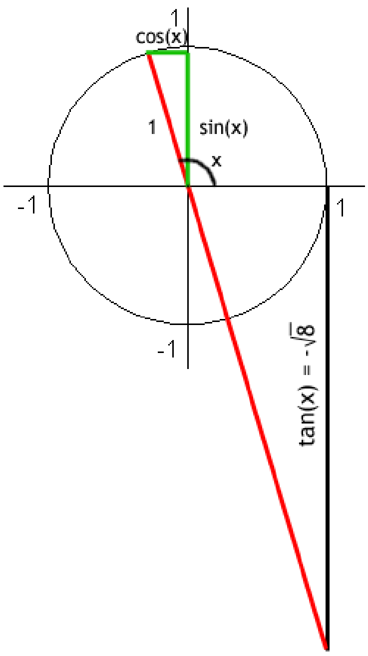
Si 1/64 du verre est rempli en 1 minute, il faudra évidemment **64 minutes** pour le remplir à ras bord.

Quatrième étape : revenir sur la solution

Ce résultat peut paraître surprenant au premier abord. Ce rapport 1/64 vient du fait que, par la formule du volume du cône, 1/4 a été élevé au cube.
Si le verre avait été rempli au tiers de sa hauteur en 1 minute, il en aurait fallu 27 en tout pour remplir le verre.
D'une manière générale, si le verre est rempli au $1/n$ de sa hauteur en 1 minute, il faudra n^3 minutes en tout pour remplir le verre.

8.8. Un dernier exemple : de la trigonométrie

Trouver, sans calculatrice, les valeurs de sin(x) et de cos(x), sachant que x est compris entre 90° et 180°, et que tan(x) = $-\sqrt{8}$.



Première étape : comprendre le problème

On ne cherche pas l'angle x, mais la valeur du sinus et du cosinus.
Comme on n'a pas le droit d'utiliser la calculatrice, il faudra utiliser le cercle trigonométrique (qui, rappelons-le, a un rayon de 1).

Le dessin n'a pas besoin d'être précis. Il doit juste aider à la compréhension du problème et à la réflexion.

Utilisez des couleurs pour bien voir les choses !

Faisons un dessin, et plaçons les valeurs connues et les valeurs cherchées.

Deuxième étape : concevoir un plan

On voit que le triangle noir est rectangle. On peut donc utiliser le **théorème de Pythagore** pour calculer le troisième côté, qui vaudra $\sqrt{1+8}=3$.

On voit sur le dessin que le triangle noir et le triangle rouge sont semblables. On pourra donc utiliser le **théorème de Thalès**.

Troisième étape : exécuter le plan

D'après Thalès : $\frac{\sin(x)}{1}=\frac{\sqrt{8}}{3}$ (comme on travaille avec des longueurs de côtés, il ne faut pas tenir compte du signe).

D'après Thalès : $\frac{\cos(x)}{1}=\frac{1}{3}$

Quatrième étape : revenir sur la solution

D'après le dessin, le sinus est proche de 1. Comme $\sqrt{8} \cong 3$, le résultat semble correct.

$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Donc, $\boxed{\sin(x)=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

Par contre, toujours d'après le dessin, le cosinus doit être négatif. Comme le dessin n'est pas précis, on peut difficilement en dire plus.

Donc, $\boxed{\cos(x)=-\frac{1}{3}}$

On peut faire une dernière vérification : comme le triangle rouge est rectangle, les côtés doivent satisfaire le théorème de Pythagore : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1^2$.

On vérifie qu'on a bien $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=1$.

Exercice 8.1

(Léonard de Pise, 1202)

C'étaient deux hommes, dont le premier avait 3 pains, et l'autre 2 : ils se promenaient en direction d'une certaine fontaine ; y étant arrivés ensemble, ils s'assirent pour manger ; et comme un soldat passait, ils l'invitèrent ; celui-ci s'assit et mangea également avec eux ; et quand ils eurent mangé tous les pains, le soldat s'en alla, leur laissant 5 besants [une ancienne monnaie byzantine] pour sa part. Desquels le premier en prit 3, parce qu'il avait [fourni] 3 pains ; quant au second il prit les deux besants restants pour ses deux pains. On demande si cette répartition était juste, ou non.

Exercice 8.2

(Nicolas Chuquet, 1484)

Trois hommes avec chacun sa femme veulent passer une rivière et n'ont qu'un petit bateau, avec lequel ils ne peuvent passer plus de deux personnes à la fois. Or, il est ordonné entre eux que nulle de leurs femmes ne se doit trouver avec un homme sans que son mari soit présent, ni en-deça de la rivière, ni au-delà. Et si autrement elle fait, elle est réputée déshonnête et déloyale à son mari. L'on demande maintenant comment ces six personnes pourront passer la rivière, l'honneur des femmes étant sauf.

Exercice 8.3

(Johannes Widmann, 1489)

Un lion, un chient et un renard dévorent ensemble un mouton. Et le lion mange le mouton en une heure. Et le renard en quatre heures. Et le chien en six heures. Alors la question est la suivante : s'ils mangent le mouton les trois ensemble, en combien de temps le mangent-ils ?